

## «Элементы теории чисел»

Цель этого курса – дать начальное представление о теории чисел, разделе математики, изучающем целые числа и различные взаимоотношения между ними. Будут рассмотрены такие базовые, ключевые моменты как делимость чисел, алгоритм Евклида, простые числа, модулярная арифметика, диофантовы уравнения и китайская теорема об остатках.

Задачи – пожалуй, основная составляющая курса. Будут рассмотрены основные типы задач и методы, приемы их решения.

Курс рассчитан на школьников окончивших 8-10 классы.

### Конспект курса по дням:

#### 1 день

НОД. Алгоритм Евклида, его корректность. Расширенный НОД.

Основная теорема арифметики.

Существование однозначного разложения произвольного целого числа на простые.

*Задачи:*

- 1) задачи на поиск НОДа и расширенного НОДа различных пар чисел
- 2) разложить несколько чисел на простые
- 3) доказать несколько свойств НОДа (трив. Пример:  $m(a, b) = (ma, mb)$ )
- 4) доказать, что уравнение  $aX + bY = c$  разрешимо в целых числах тогда и только тогда, когда  $(a, b) | c$ .

#### 2 день

Бесконечность множества простых чисел.

Решето Эратосфена.

*Задачи:*

- 1) доказать бесконечность простых чисел вида  $4n+3$ ,  $4n+1$ ,  $6n+5$
- 2) проверить несколько чисел на простоту
- 3) доказать что для каждого  $K$  существует бесконечно много последовательностей натуральных чисел  $M, \dots, M + K - 1$  не содержащих простых чисел
- 4) доказать, что среди чисел задаваемых конкретным многочленом – бесконечное количество составных  $(12x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 6x - 14)$
- 5) доказать, что среди чисел задаваемых произвольным многочленом – бесконечное количество составных

#### 3 день

Сравнения по модулю. Сравнимость по модулю, как отношение эквивалентности. Классы сравнимых по модулю чисел. Связь сравнимости по модулю с арифметическими операциями.

Полная система вычетов. Приведенная система вычетов.

Теорема Ферма.

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Теорема Эйлера.

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}, \text{ если } (a, m) = 1$$

*Задачи:*

- 1) вывести признаки делимости на 3, 9, 11, 101, 37, 7, 11, 13.
- 2) доказать, что  $(h_1 + \dots + h_n)^p \equiv h_1^p + \dots + h_n^p \pmod{p}$ .
- 3) найти остатки от деления разных чисел в разных степенях на разные числа (например остаток от деления  $2009^{2010}$  на 13)
- 4) доказать, что есть бесконечно много натуральных чисел, не являющихся суммой трех

квадратов.

5) может ли сумма цифр точного квадрата равняться 2003?

6)  $x+y \div 7 \Rightarrow x^7 + y^7 \div 49$

#### 4 день

Диофантовы уравнения. Критерий разрешимости в целых числах. Общее решение.

*Задачи:*

1) Решить разные диофантовы уравнения.

Пример:  $2x + 5y = 14$ , решить в целых числах

2) Поиск решения диофантовых уравнений при различных ограничениях.

Найти все целые положительные решения уравнения  $3x - 7y = 5$

3) Всякие задачи вроде – можно ли взвесить такой-то вес имея такие-то гири.

Пример: Можно ли отвесить 28г некоторого вещества на чашечных весах, имея только 4 гири по 3г и 7 гирь по 5г

#### 5 день

Китайская теорема об остатках. Summary курса, ликвидация проблемных моментов, разбор вопросов.

*Задачи:* Решение разных систем сравнений и по ходу проверка систем на соответствие условиям теоремы.

Пример:

$$x \equiv 2 \pmod{5},$$

$$x \equiv 5 \pmod{7},$$

$$x \equiv 3 \pmod{11}$$