Заочная олимпиада Летней многопрофильной школы – 2015

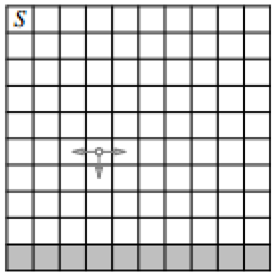
Математика

8 класс

1. Какое наибольшее произведение трёх различных чисел, составленных из одного знака, является полным квадратом?

2. Сторона квадрата равна a, а его диагональ $a+1$. Запишите площадь квадрата в виде $k+l\sqrt{m}$, где k, l, m – неотрицательные целые числа.

3. Школьник Дамир бродит по лесу, наблюдая за птицами. Лес разделён на сто секторов, как показано на рисунке. Путь свой он начинает с сектора S. Из каждого сектора он идёт только на Юг, Запад или Восток и никогда не возвращается в сектор, в котором уже он уже побывал. Сколькими способами Дамир может добраться до самой южной части леса, отмеченной на рисунке серым?

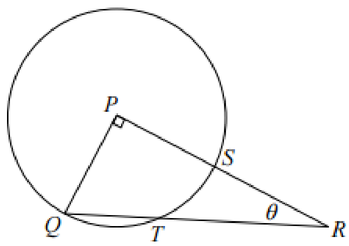


4. Определите минимальное значение выражения, $\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}$ для натуральных чисел a, b, c таких, что $a+b+c \leq 3$.

5. Пять Карлсонов-близняшек собрались на крыше, чтобы отпраздновать свой общий День рождения, когда оказалось, что самый младший из братьев потерял по дороге свой торт. Можно ли им разделить четыре успешно привезённых торта так, чтобы каждый получил одинаковый набор из трёх кусков?

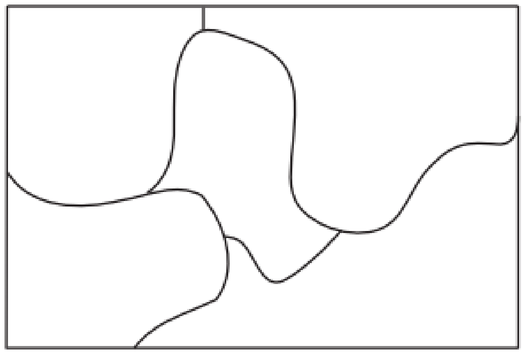
Дорогие ЛМШата, при решении следующих задач вам могут пригодиться знания, полученные в летней школе.

6. Треугольник Δ PQR прямоугольный. P – центр окружности с радиусом PQ. Угол PQR равен φ.



Окружность пересекает PR в точке S и RQ в точке T. $QT = 8$ и $TR = 10$. Найдите значение $\cos \varphi$.

7. Каждую область на рисунке нужно отметить одним из чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$, причём отметки не должны повторяться. Если две соседние области отмечены числами x и y, то должны выполняться следующие условия:



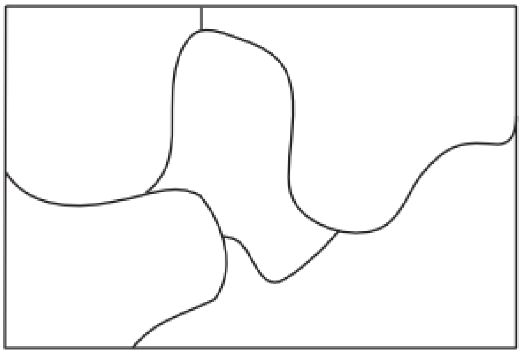
- x и y не делятся оба на 2,
- x и y не делятся оба на 3,
- x и y не делятся оба на 5.

Сколькими способами можно нанести отметки?

9 класс

1. Для каждого положительного целого n определена точка P_n с координатами $((n-1)2, n(n-1))$ и точка Q_n с координатами $((n-1)2, 0)$. Для скольких целых чисел n из интервала $2 \le n \le 99$ площадь четырёхугольника $Q_n P_n P_{n+1} Q_{n+1}$ является полным квадратом?
2. Точки $A(5, -8)$, $B(9, -30)$ и $C(n, n)$ лежат на одной прямой. Найдите значение n.
3. Решите в целых числах уравнение: $x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3$.
4. $\triangle ABC$ - равнобедренный. $\angle A = \angle B = 80°$. Прямая, проходящая через точку B и центр описанной окружности, пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AB = CD$.
5. Чему равен в градусах самый маленький положительный угол x, для которого $4^{\sin^2 x} 2^{\cos^2 x} = 2\sqrt[4]{8}$?

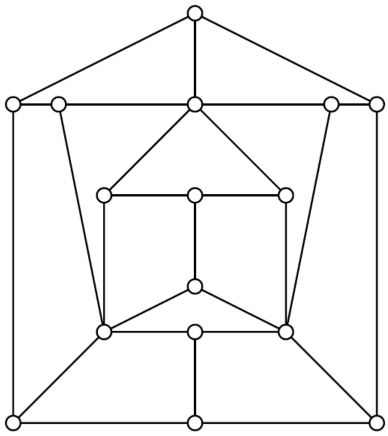
Дорогие ЛМШата, при решении следующих задач вам могут пригодиться знания, полученные в Летней школе.



6. Каждую область на рисунке нужно отметить одним из чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$, причём отметки не должны повторяться. Если две соседние области отмечены числами x и y, то должны выполняться следующие условия:

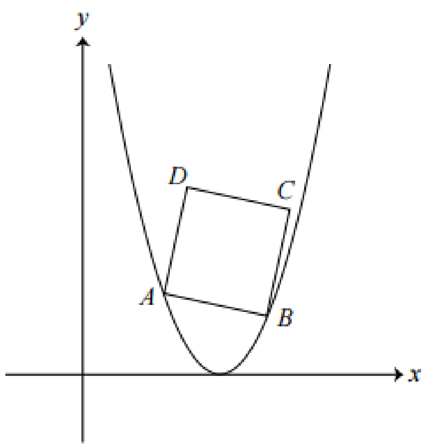
- x и y не делятся оба на 2,
- x и y не делятся оба на 3,
- x и y не делятся оба на 5.

Сколькими способами можно нанести отметки?



7. В Пульской области 16 совершенно идентичных городов, которые соединены дорогами, как показано на рисунке. Разница между ними лишь в том, что в одних городах все дома пурпурные, а в других – жёлтые. Может ли путник посетить все города, чередуя желтые и пурпурные? И может ли он, начав из некоторого города, вернуться в него, побывав в каждом городе по одному разу (не обращая внимания на цвет домов)?

10 класс



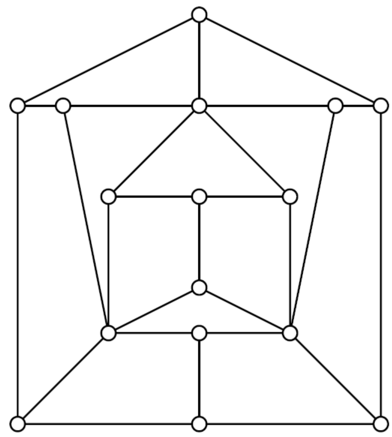
1. Известно, что $\log_{3n} 675\sqrt{3} = \log_n 75$. Найдите значение n^5.
2. На рисунке ABCD – квадрат. Точки A(1,4) и B лежат на параболе, вершина которой на оси

Ох. Точка С имеет координаты $\left(\frac{39}{4}, \frac{37}{4}\right)$. Напишите уравнение параболы.

3. Множество S содержит n натуральных чисел. Среднее значение всех элементов S составляет $\frac{2}{5}$ от наибольшего элемента и $\frac{7}{4}$ от наименьшего. Найдите минимально возможное значение n.
4. Окружности S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке K. Также они касаются внутренним образом окружности S в точках A_1 и A_2, соответственно. Обозначим через P одну из точек пересечения S и общей касательной к S_1 и S_2 в точке K. Прямая PA_1 пересекает S_1 в точке B_1, а PA_2 - окружность S_2 в точке B_2. Докажите, что B_1B_2 – общая касательная окружностей S_1 и S_2.
5. Пусть a, b и c такие, что a + b + c = 0. $\mathrm{P} = \frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ac} + \frac{c^2}{2c^2+ab}$. Найдите значение P.

Дорогие ЛМШата, при решении следующих задач вам могут пригодиться знания, полученные в летней школе.

6. В Пульской области 16 совершенно идентичных городов, которые соединены дорогами, как показано на рисунке. Разница между ними лишь в том, что в одних городах все дома пурпурные, а в других – жёлтые. Может ли путник посетить все города, чередуя желтые и пурпурные? И может ли он, начав из некоторого города, вернуться в него, побывав в каждом городе по одному разу (не обращая внимания на цвет домов)?



7. Дан правильный N-угольник. Среди всех движений плоскости, переводящих его в себя, найдите те движения G, которые обладают следующим свойством: для любого другого движения F, переводящего в себя тот же N-угольник, их последовательное применение даёт один и тот же результат.