Арифметика функций

Григорий Коротеев

16 сентября 2011 г.

Аннотация

Данный курс читался на второй неделе смены 2011 года ЛМШ при МЦНМО для школьников, окончивших 9-10 классы. Он представляет собой практикум по решению задач школьных олимпиад, в которых демонстрируются значимость понятия функции и некоторые достаточно часто встречающиеся конструкции. На самих семинарах разбирались идеи и оригинальные решения участников, которые часто были не менее интересны, чем авторские или преподавательские. Последнее занятие было посвящено выводу простейших тригонометрических формул Рамануджана. Все замечания, уточнения и пожелания просьба присылать на `greg.koroteev@gmail.com`.

Задачи

1. Найти функцию $f(x)$ такую, что $f(\sin(x)) = \cos^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Найти функцию $f(x)$ такую, что $f(x) + 2f(1/x) = 2^{1/x}$, $x \neq 0$.

3. Найти функцию $f(x)$ такую, что $xf(y) - yf(x) = (x-y)f(xy), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

4. Для каких значений параметра а функция $f(t) = t/(e^t - 1) + at$ чётная?

5. Найдутся ли такие функции f, g с наименьшим периодом T, что $f + g$ имеет наименьший период $T/2$.

6. $F(1) = 2, F(n) = F(n-1) + 1/2, \forall n \in \mathbb{N}$ найти $F(101)-?$.

7. Написать формулу, не использующую модуль, эквивалентную $1/2(x + y + |x + y|)$.

8. Найти $f(4)-?$, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x)$, если $f(1) = -1, \Delta f(1) = 4, \Delta f(2) = -2, \Delta^2 f(2) = 6$.

9. Найти $f'(0)-?$, если $f(x) = f(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

10. Какое значение из $\{-27, -18, -6, -3, -1/2\}$ коэффициент c, полинома $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, может принимать, если известно: $p(-3) = p(2), p'(-3) = 0$.

11. Доказать $n^5 - 5n^3 + 4n \vdots 120, \forall n \in \mathbb{N}$.

12. Доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}$ число вида $n^3 + 3n^2 + 6n + 8$ не может быть простым.

13. Вычислить $\operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}(2) + \operatorname{arctg}(3)$.

14. f_1, f_2 -квадратные полиномы, имеющие корни.Известно, что $f_1 - f_2$ не имеет корней. Доказать, что многочлен $f_1 + f_2$ имеет корни.

15. x_1, x_2 -корни многочлена $x^2+2bx+c$, а x_3, x_4 -корни $x^2+2cx+b$, причем $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Что можно сказать о паре чисел (b, c)?

16. f_1, f_2, f_3 - квадратные полиномы с неравными старшими коэффициентами имеют один корень. Доказать, что корни $f_1 - f_2, f_2 - f_3, f_3 - f_1$ совпадают.

17. Дан многочлен $P(t) = t^2 - 4t$, доказать, что при всех $x \geq 1, y \geq 1$ выполняется соотношение $P(x^2 + y^2) \geq P(2xy)$.

18. Каждый из квадратных трехчленов $P_1(x) = x^2 + px + q, P_2(x) = x^2 + qx + p$ имеет корни. Докажите, что тогда какой-то из трехчленов $Q_1 = x^2 + (p-2)x + 1, Q_2 = x^2 + (q-2)x + 1$ имеет корень.

19. Решить $[1/(\sin(x))] + [1/(\cos(x))] = 0$.

20. Решить $\sin(\sin(\alpha) + \alpha) = \cos(\cos(\alpha) + \alpha)$, если $0 \leq \alpha \leq \Pi/2$

21. Найти все функции f, удовлетворяющие для всех вещественных значений x, y уравнению $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$.

22. При каких n существует многочлен $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с действительными коэффициентами такой, что при всех $x \in \mathbb{R}, P_n(x) \geq -3, P_n(-2) = P_n(0) = P_n(2) = 0$?

23. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a + b + c = 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ найти $a^4 + b^4 + c^4$.

24. $\forall x, y, z \neq 0$ найти xyz , если $x + 1/y = y + 1/z = z + 1/x$.

25. Решить систему уравнений: $x + y + z = 0, 1/x + 1/y + 1/z = 0$.

26. Найти $\min\left(\sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 - 14x + 58}\right)$.

27. Существуют ли такие линейные комбинации функций $\Sigma_{k,l} a_{k,l} f^k g^l = x, \forall k, l \in \mathbb{N}$, α) для $f(x) = x^2 + x, g(x) = x^2 + 2$) β)для $f(x) = 2x^2, g(x) = 2x$ γ) для $f(x) = x^2 + x, g(x) = x^2 - 2$.

28. Сколько решений уравнения $f(f(x)) = x$, $f(x) = |4 - 4|x|| - 2$?

29. Существуют ли,и если существуют, то какие константы A, B, C, φ, ψ такие, что $(\sin(x - \Pi/3) + 2)^2 + A\cos(x + \varphi) + B\sin(2x + \psi) = C$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

30. Найти все такие f, что верно $f(f(x + y)) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

31. $f(x)$ -полином степени n, имеет 10 решений в уравнении $f(x) = 10$, и 15 решений в уравнении $f(x) = 15$. Доказать, что среди 25 корней найдется такой x_0 ,что $f'(x_0) = 0$.

32. Найти все такие полиномы $P(x, y)$, что $P(x + y, x - y) = P(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

33. Две дробно-линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) - g(x) \geq 1997$ для всех x,при которых обе функции определены. Доказать, что функция $f(x) - g(x)$ постоянна на своей области определения. (Напоминание: дробно-линейной функцией называют частное двух линейных функций.)

34. a, b, c – целые числа,такие что многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных попарно взаимно простых натуральных корня и многочлен $ax^2 + bx + c$ имеет натуральный корень. Доказать, что число $|a|$ - составное.

35. Решить систему уравнений: $f(x^2+1)+g(2x+1) = -1$, $f'(x^2+1)+g'(2x+1) = 1/x-1$.

36. Решить систему уравнений: $f(1/y) + g(1) = 1 + y$, $y^4 f(y^3) + g(y^2) = y + y^2$.

37. Решить систему уравнений: $f(x) + g(x) = 8\cos(3x) - 3\cos(2x)$, $3f'(x) - 3g'(x) = -18\sin(2x)$.

38. Решить систему уравнений: $f(3x) + g(3x) = 3 + 3x + 3/2x^2 + \sin(2x)$, $f'(3x) - g'(3x) = -1/3 - x - 2/3\cos(2x)$.

39. Найти все такие f, что $f(\sin(\pi x)) = f(x)\cos(\pi x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

40. Найти $f(2011)$, если известно, что $f(2) = 0, f(3) \geq 0, f(9999) = 3333, f(m + n) - f(m) - f(n) = 0$ or $1, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

41. Найти $f(4, 1981)$, если известно, что $f(0, y) = y + 1, f(x + 1, 0) = f(x, 1), f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$.

42. Найти все такие функции $f(x)$, что $f(x, f(y)) = yf(x), f(x) \to 0$ при $x \to 0$, $\forall x, y \geq 0$.