Геометрия Лобачевского

Гумин Максим, 2011

Содержание

1 Предисловие

Геометрия Лобачевского возникла как абстрактная теория, основывающаяся на аксиомах евклидовой геометрии, где вместо пятого постулата (через точку вне прямой проходит ровно одна прямая, параллельная данной) бралось его отрицание. Долгое время оставалось неясным, можно ли таким образом обращаться с аксиомами, предпринимались многочисленные попытки доказать противоречивость измененной системы аксиом. С появлением элементарных моделей геометрии Лобачевского стало понятно, что она не более противоречива, чем Евклидова геометрия, и что последняя не является единственно возможной. В курсе будет рассказано об истории попыток доказательства пятого постулата, но сама геометрия Лобачевского будет излагаться не аксиоматически, а через модели, в духе Эрлангенской программы Клейна.

2 Немного истории

2.1 История открытия неевклидовых геометрий

Считается, что первую удовлетворительную систему аксиом геометрии создал Евклид. Современному человеку язык Евклида, жившему в третьем веке до нашей эры, показался бы довольно странным, а математические утверждения, сформулированные на нем — нестрогими. Например, одна из аксиом гласила, что прямая — это длина без ширины. В целом система аксиом Евклида была далеко не совершенной и сильно отличалась от того, что можно увидеть в современном литературе, например в школьном учебнике Погорелова или книге Гильберта по основаниям геометрии. Среди всех аксиом пятый постулат (в «Началах» Евклид различает постулаты и аксиомы) выделялся своей длиной:

> И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Он больше похож на сложную, неочевидную теорему. Евклид, вероятно, сознавал это, и поэтому первые 28 предложений в «Началах» доказываются без его помощи. Кроме того, его трудно проверить на практике. Никто не сможет гарантировать, что две реальные прямые пересекутся, если их продолжить очень далеко. В XIX веке для его проверки даже ставились эксперименты. На современный язык пятый постулат можно перевести так:

> Если сумма внутренних углов с общей стороной, образованных двумя прямыми при пересечении их третьей, с одной из сторон от секущей меньше 180°, то эти прямые пересекаются, и притом по ту же сторону от секущей.

Систему аксиом, которая получается из евклидовой выкидыванием пятого постулата называют системой аксиом абсолютной геометрии. Легко доказать, что в абсолютной геометрии пятый постулат эквивалентен следующему утверждению: *через точку вне прямой можно провести ровно одну прямую, не пересекающую данную.* Вообще, можно сформулировать множество эквивалентных ему утверждений:

- Существует прямоугольник (хотя бы один), то есть четырёхугольник, у которого все углы прямые.
- Существуют подобные, но не равные треугольники.
- Существует треугольник сколь угодно большой площади.
- Сумма углов одинакова у всех треугольников.
- Для всякого треугольника существует описанная окружность.
- Справедлива теорема Пифагора.

На протяжении двух тысяч лет многие математики пытались вывести пятый постулат из остальных аксиом. В 1733 году итальянский математик Саккери публикует такую работу. В ней он рассуждает от противного: принимает за истину отрицание пятого постулата и пытается получить противоречие. Однако противоречия не получается. Вместо этого у него получается множество абсурдных теорем (например, что существуют непересекающиеся прямые, не имеющие общего перпендикуляра), которые не согласуются с нашим привычным представлением о пространстве, но логически вполне непротиворечивы. Впоследствии Саккери неоднократно возвращался к пятому постулату и в конце концов вывел его из остальных аксиом, сделав, правда, небольшую ошибку в вычислениях. Сочинение Саккери было оценено только после создания неевклидовой геометрии.

В 1766 немецкий математик Ламберт публикует похожую работу, в которой он развивает систему абсурдных следствий из отрицания пятого постулата. Однако, в отличие от Саккери, он не делает вывода о противоречивости этой системы.

> Доказательства евклидова постулата — пишет Ламберт — могут быть доведены столь далеко, что остается, по-видимому, ничтожная мелочь. Но при тщательном анализе оказывается, что в этой кажущейся мелочи и заключается вся суть вопроса; обыкновенно она содержит либо доказываемое предложение, либо равносильный ему постулат.

Более того, Ламберт даже усматривает возможность существования такой геометрии, которая основывается на отрицании пятого постулата, примечая аналогию со сферической геометрией:

> Я склонен даже думать, что третья гипотеза справедлива на какой-нибудь мнимой сфере. Должна же быть причина, вследствие которой она на плоскости далеко не поддается опровержению, как это легко может быть сделано со второй гипотезой.

Бесплодные попытки доказательства побудили некоторых математиков высказать предположение о том, что пятый постулат вообще никогда не будет доказан. Вот, что венгерский геометр Вольфганг Больяй писал своему сыну Иоганну:

> Молю тебя, не делай только и ты попыток одолеть теорию параллельных линий; ты затратишь на нее все свое время, а предложения этого вы не докажете все вместе... Этот беспросветный мрак может потопить тысячи ньютоновских башен. Он никогда не прояснится на земле, и никогда несчастный род человеческий не будет владеть на земле чем-либо совершенным даже в геометрии. Это большая и вечная рана в моей душе.

В первой половине XIX века по пути, проложенному Саккери, пошли сразу три математика: Гаусс, Лобачевский и Бойяи. Но цель у них была уже иная — не разоблачить неевклидову геометрию как невозможную, а, наоборот, построить альтернативную геометрию и выяснить её возможную роль в реальном мире. На тот момент это была совершенно еретическая идея, никто из учёных ранее не сомневался, что физическое пространство евклидово.

Первым был Гаусс. Он не публиковал никаких работ на эту тему, но его черновые заметки и несколько писем однозначно подтверждают его понимание неевклидовой геометрии. В 1818 году в письме к австрийскому астроному Герлингу он писал:

> Я радуюсь, что вы имеете мужество высказаться так, как если бы Вы признавали ложность нашей теории параллельных, а вместе с тем и всей нашей геометрии. Но осы, гнездо которых Вы потревожите, полетят Вам на голову.

В другом письме:

> Вероятно, я еще не скоро смогу обработать свои пространные исследования по этому вопросу, чтобы их можно было опубликовать. Возможно даже, я не решусь на это в всю свою жизнь, потому что боюсь крика беотийцев (по преданию, жители Беотии славились в Древней Греции своей глупостью), который поднимется, если я выскажу свои воззрения целиком.

Труды Бойяи не привлекли внимания, и он вскоре оставил эту тему.

В 1826 году на заседании физико-математического общества Казанского университета Николай Иванович Лобачевский представил свою работу «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях». Работа эта, правда, не сохранилась.

Ознакомившись с работой Лобачевского, Гаусс энергично ходатайствует об избрании русского математика иностранным членом-корреспондентом Геттингенского королевского общества (что и произошло в 1842 году). В письме 1846 года астроному Шумахеру Гаусс так отзывается о работе Лобачевского:

> Это сочинение содержит в себе основания той геометрии, которая должна была бы иметь место и притом составляла бы строго последовательное целое, если бы евклидова геометрия не была бы истинной... Лобачевский называет ее «воображаемой геометрией»; Вы знаете, что уже 54 года (с 1792 г.) я разделяю те же взгляды с некоторым развитием их, о котором не хочу здесь упоминать; таким образом, я не нашёл для себя в сочинении Лобачевского ничего фактически нового. Но в развитии предмета автор следовал не по тому пути, по которому шел я сам; оно выполнено Лобачевским мастерски в истинно геометрическом духе. Я считаю себя обязанным обратить Ваше внимание на это сочинение, которое, наверное, доставит Вам совершенно исключительное наслаждение.

При жизни Лобачевский и Бойяи не получили должного признания. Вот, например, отрывок из отзыва Остроградского на мемуар Лобачевского «О началах геометрии», который тот представил на рецензию в Санкт-Петербургскую академию наук в 1832 г.:

> Автор, по-видимому, задался целью писать таким образом, чтобы его нельзя было понять. Он достиг этой цели; большая часть книги осталась столь же неизвестной для меня, как если бы я никогда не видал её. [...] Можно превзойти самого себя и прочесть плохо средактированный мемуар, если затрата времени искупится познанием новых истин, но более чем тяжело расшифровать рукопись, которая их не содержит и которая трудна не возвышенностью идей, а причудливым оборотом предложений, недостатками в ходе рассуждений и нарочито применяемыми странностями. [...] Книга г–на ректора Лобачевского опорочена ошибкой, что она небрежно изложена и что, следовательно, она не заслуживает внимания Академии.

Лобачевский умер в 1856 году. Спустя несколько лет была опубликована переписка Гаусса, в том числе несколько восторженных отзывов о геометрии Лобачевского, и это привлекло внимание к трудам Лобачевского. Появляются переводы их на французский и итальянский языки, комментарии видных геометров. Публикуется и труд Бойяи.

В 1868 году выходит статья Бельтрами об интерпретациях геометрии Лобачевского. Бельтрами определил метрику плоскости Лобачевского и доказал, что она имеет всюду постоянную отрицательную кривизну. Такая поверхность тогда уже была известна — это псевдосфера Миндинга. Бельтрами сделал вывод, что локально плоскость Лобачевского изометрична участку псевдосферы. Окончательно непротиворечивость геометрии Лобачевского была доказана в 1871 году, после появления модели Клейна.

Существование моделей геометрии Лобачевского доказывает, что она непротиворечива в той же степени, что и евклидова геометрия. Поэтому после появления модели Клейна, а затем и моделей Пуанкаре, споры по поводу противоречивости новой геометрии затихли. А после работ Эйнштейна начала XX века геометрию Евклида уже нельзя было считать физически верной.

2.2 Трудности теоретического характера

Изложению геометрии Лобачевского на основе аксиом абсолютной геометрии препятствуют некоторые трудности теоретического характера.

Существует много моделей геометрии Лобачевского. Для доказательства того, что некоторая интерпретация аксиоматической теории является моделью, необходимо показать что в этой интерпретации истинны все аксиомы теории. Однако в дальнейшем нам понадобится большее: мы будем пользоваться свойствами модели (т.е. Евклидовой геометрией, свойствами инверсии и т.п.), чтобы доказывать факты геометрии Лобачевского. Но законно ли это? Не будем ли мы получать утверждения, не доказуемые через аксиомы? Вдруг наша модель — это всего лишь частный случай геометрии Лобачевского (подобно тому как геометрия Евклида — частный случай абсолютной геометрии). Для того, чтобы таких «частных случаев» не возникало, необходимо (и достаточно), чтобы система аксиом была полна, т.е. каждое утверждение либо выводится из аксиом, либо выводится его отрицание. Но полна ли система аксиом геометрии Лобачевского?

Для того чтобы ответить на этот вопрос,эту формальную систему нужно сначала предъявить. А это не так уж просто! Например, система аксиом Гильберта евклидовой геометрии выходит за рамки логики первого порядка. А любая система аксиом в логике второго порядка обязательно неполна (или противоречива). Для того, чтобы избежать этих трудностей, мы просто возьмем одну из моделей геометрии Лобачевского за определение.

2.3 Приложение: аксиоматика Евклида

Начала Евклида с 1482 года выдержали более 500 изданий, это самая популярная научная книга.

Определения:

1) Точка есть то, что не имеет частей.
2) Линия же — длина без ширины.
3) Концы же линии — точки.
4) Прямая линия есть та, которая равно расположена относительно точки на ней.
5) Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6) Концы же поверхности — линии.

Аксиомы:

1) Равные одному и тому же равны между собой.
2) И если к равным прибавляют равные, то и целые будут равны.

3) И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
4) И если к неравным прибавляются равные, то целые будут не равны.
5) И удвоенные одного и того же равны между собой.
6) И половины одного и того же равны между собой.
7) И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8) И целое больше части.
9) И две прямые не содержат пространства.

Постулаты:
1) Требуется, чтобы можно было через всякие две точки провести прямую.
2) И ограниченную прямую непрерывно продолжать по прямой.
3) И из всякого центра всяким расстоянием описать круг.
4) И что все прямые углы равны.
5) И если прямая линия, падающая на две прямые, делает меньшими двух прямых углы по одну сторону, чтобы эти две прямые, будучи продолжены, совпали с той стороны, с которой углы меньше двух прямых.

3 Инверсия

3.1 Определение и основные свойства

Инверсия точки относительно окружности. Пополнение плоскости бесконечно удаленной точкой. Обобщенные окружности. Аналитическое задание инверсии. Поризм Штейнера. Многомерное обобщение. Анекдот про льва и клетку.

Лемма 1. *$\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$. Другими словами, точки A, B, A', B' лежат на одной окружности.*

Следствие 1. $A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$

Утверждение 1. *Свойства инверсии:*
1) Центральные прямые остаются на месте.
2) Нецентральные прямые переходят в центральные окружности.
3) Центральные окружности переходят в нецентральные прямые.
4) Нецентральные окружности переходят в нецентральные окружности.

Утверждение 2. *Инверсия переводит касающиеся кривые в касающиеся (без доказательства).*

Следствие 2. *Инверсия сохраняет углы между кривыми (прямыми и окружностями).*

Лемма 2. *Существует инверсия, переводящая две данные непересекающиеся окружности в концентрические.*

Доказательство. Рассмотрим такую точку C на линии центров, касательные из которой к двум данным окружностям равны (пересечение радиальной оси с линией центров). Полюсом искомой инверсии будет пересечение окружности с центром в точке C (и пересекающей две данные под прямым углом) с линией центров.

3.2 Задачи

1. Что станет с двумя семействами прямых $x = const$ и $y = const$ при инверсии относительно единичной окружности с центром в начале координат?

2. Доказать, что одномерная стереографическая проекция — это ограничение инверсии относительно некоторой окружности. Аналогично, обычная стереографическая проекция (обо ее варианта) — ограничение инверсии относительно некоторой сферы.

3. Теорема Птолемея: доказать, что во вписанном четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей.

4. Доказать, что при инверсии симметричные относительно обобщенной окружности точки переходят в симметричные.

5. Найдите множество точек касания пар окружностей, касающихся сторон данного угла в данных точках A и B.

6. Докажите, что инверсия с центром в вершине A равнобедренного треугольника ABC и степенью AB^2 переводит основание BC треугольника в дугу BC описанной окружности.

• **7.** Какое изображение мы увидим в сферическом зеркале? Как оно связано с инверсией?

3.3 Построения

8. Построить образ точки при инверсии.

9. Проблема Аполлония:

1) построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности;

2) через данную точку провести окружность, касающуюся двух данных окружностей;

3) построить окружность, касающуюся трех данных.

10. Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

11. Постройте окружность, касающуюся данной окружности S и перпендикулярную двум данным окружностям S_1 и S_2.

3.4 Построения одним циркулем

12. Постройте отрезок, который в n раз длиннее данного отрезка.

13. Постройте точку, симметричную точке A относительно прямой, проходящей через данные точки B и C.

14. Разделить данный отрезок пополам.

15. Построить центр данной окружности.

4 Эрлангенская программа Клейна

В девятнадцатом веке математики осознали, что евклидова геометрия не является единственной мыслимой геометрией. Даже если принять, что пространство, в котором мы живем, подчиняется законам евклидовой геометрии (что на самом деле верно лишь в первом приближении), имеет смысл изучать геометрию и других пространств, которые возникают в результате математических построений. В связи с этим возникает вопрос, что же в таком случае следует понимать под геометрией.

Немецкий математик Феликс Клейн в своей лекции 1872 года, получившей известность под названием «Эрлангенская программа», дал определение геометрии как науки, изучающей свойства фигур, инвариантных относительно заданной группы преобразований. Разберемся, что это значит.

Что такое равные треугольники в евклидовой геометрии? Хочется сказать, что два треугольника равны, если они "одинаковой формы"или если они "ничем друг от друга не отличаются". В школе как правило дается такое определение равенства фигур: две фигуры равны, если их можно совместить движением. Важно понимать, что это не какое-то *абсолютное* равенство, а равенство *относительно движений евклидовой плоскости.* А точнее относительно группы движений евклидовой плоскости.

В определении равенства фигур могла фигурировать и другая группа. Например, можно было сказать, что две фигуры равны, если их можно совместить

- преобразованием подобия
- параллельным переносом
- движением, сохраняющим ориентацию

В таком случае мы получили бы три новые геометрии. В первой геометрии, основанной на преобразованиях подобия, равных треугольников было бы "больше", чем в евклидовой. То есть любые две фигуры, равные в евклидовой геометрии, были бы равны и в «геометрии подобий». Другими словами, получилась бы более богатая геометрия. Другие две геометрии были бы беднее евклидовой.

В евклидовой геометрии треугольник обладает рядом свойств. Например, можно говорить о длине его сторон. А в геометрии подобий бессмысленно определять длину, так как она не сохраняется при преобразованиях подобия, зато по-прежнему имеет смысл измерять углы. Наоборот, в геометрии, основанной на параллельных переносах, у фигур появляются дополнительные свойства (инвариантные относительно действия соответствующей группы), которых у них не было в евклидовой геометрии.

Совершенно аналогично в рамках группового подхода могут быть построены и другие геометрии, например, аффинная, проективная, конформная геометрии или геометрия Лобачевского.

Вопрос. Какие фигуры следует считать равными в геометрии, в которой группа преобразований состоит только из тождественного преобразования? А если группа преобразований состоит вообще изо всех возможных биективных отображений?

5 Модель Пуанкаре в верхней полуплоскости $\mathbb{H}_2$

5.1 Носитель модели и группа преобразований

Рассмотрим на евклидовой плоскости какую-нибудь прямую a, которую без ограничения общности будем считать горизонтальной. Точками плоскости Лобачевского будем считать точки верхней полуплоскости относительно этой прямой, которую в дальнейшем будем называть абсолютом. Точки самого абсолюта плоскости Лобачевского не принадлежат.

Следуя идее Клейна, зададим группу преобразований плоскости Лобачевского. Итак, пусть группе преобразований принадлежат симметрии относительно вертикальных прямых и симметрии относительно окружностей с центрами на абсолюте, а также все, что получается из этих преобразований взятием композиций в конечном числе. Заметим, что

- Композиция симметрий относительно двух перпендикулярных прямых дает горизонтальный сдвиг. Горизонтальный сдвиг на нулевую величину — тождественное преобразование.

- Композиция симметрий относительно двух концентрических окружностей с центром на абсолюте дает гомотетию с центром на абсолюте. Гомотетия с единичным коэффициентом — тождественное преобразование.

Таким образом, сдвиги и гомотетии также входят в нашу группу преобразований.

Две фигуры называются *равными* (или конгруэнтными), если существует преобразование из группы, переводящее одну фигуру в другую.

Теорема 1. *Основные свойства группы преобразований:*

1) Элементы описанной выше группы преобразований биективно переводят верхнюю полуплоскость в себя же.

2) При помощи этих преобразований можно перевести любую данную точку плоскости Лобачевского в любую другую данную.

Последнее свойство называется *транзитивностью* действия группы. Его еще можно переформулировать так: все точки равны.

Далее мы будем определять различные объекты геометрии Лобачевского: прямые, углы, расстояния. При этом важно проверять, что эти определения согласованы с введенной выше группой преобразований.

16. Коммутативна ли группа преобразований геометрии Лобачевского?

5.2 Прямые

Прямыми в модели Пуанкаре назовем лучи, перпендикулярные абсолюту и с вершиной на нем (сама вершина луча, как и весь абсолют, не принадлежат плоскости Лобачевского), и верхние полуокружности с центром на абсолюте.

Из свойств инверсии, которые мы доказали ранее, следует, что такое определение прямой согласовано с нашей группой преобразований, т.е. что любой ее элемент переводит прямые в прямые. Кстати, группу преобразований сейчас можно описать проще: она порождена симметриями относительно прямых геометрии Лобачевского.

Теорема 2. *Через любые две несовпадающие точки проходит ровно одна прямая.*

Условимся говорить, что две прямые имеют общую бесконечно удаленную точку, либо если эти прямые пересекаются на абсолюте, либо если обе этих прямых являются лучами, перпендикулярными абсолюту. Параллельными назовем прямые, имеющие общую бесконечно удаленную точку. Прямые, не имеющие общих точек (даже бесконечно удаленных) назовем расходящимися (или сверхпараллельными).

Теорема 3. *Через точку вне прямой можно провести ровно две прямые, параллельные этой прямой, и бесконечное число (континуум) расходящихся прямых.*

17. Доказать, что через точку, лежащую внутри угла, не всегда можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла.

18. Построение середины отрезка. Даны две точки A и B. Отразим точку A относительно абсолюта и получим точку A'. Проведем отрезок $A'B$, пересекающий абсолют в точке C, и восстановим из нее перпендикуляр к абсолюту, пересекающий неевклидов отрезок AB в точке M. Доказать, что $AM = BM$.
Решение. Сделаем инверсию с центром в точке X.

5.3 Углы

Величиной угла между двумя пересекающимися неевклидовыми прямыми мы назовем величину того же угла в евклидовой геометрии. Угол между кривыми определяется так же, как и в евклидовой геометрии. Из свойств инверсии следует, что определение угла согласовано с группой преобразований геометрии Лобачевского: любой преобразование этой группы сохраняет углы между прямыми.

Теорема 4. *К двум расходящимся прямым можно провести ровно один перпендикуляр.*

Доказательство. Как и многие теоремы в нашем курсе эта доказывается переходом от общего случая к специальному. Нужно лишь перевести окружности, задающие прямые, в концентрические при помощи инверсии.

Лемма 3. *На множестве равных по величине углов группа преобразований геометрии Лобачевского действует транзитивно.*

- **19.** Доказать четвертый признак равенства треугольников: если все три угла одного треугольника равны всем трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

6 Другие модели геометрии Лобачевского

6.1 Модель Пуанкаре в круге $\mathbb{P}_2$

Мы знаем, что инверсии с центрами на абсолюте являются элементами группы преобразований плоскости Лобачевского. Что получится, если сделать инверсию относительно окружности, центр который лежит не на абсолюте? Получится так называемая модель Пуанкаре в круге.

Пусть для начала центр лежит ниже абсолюта. Тогда сам абсолют перейдет в окружность (абсолют в новой модели), а верхняя полуплоскость — во внутренность этой окружности. Прямые модели $\mathbb{H}_2$ перейдут либо в дуги окружностей, перпендикулярных новому абсолюту, либо в его диаметры. Углы между всеми кривыми сохранятся.

20. Что получится, если центр инверсии будет лежать выше абсолюта?

Теорема 5. *Сумма углов любого треугольника строго меньше π.*

Доказательство. Рассмотрим этот треугольник в модели $\mathbb{H}_2$. Сделаем инверсию с центром в одной из вершин треугольника. Получим треугольник в модели $\mathbb{P}_2$, две стороны которого изображаются диаметрами большого круга. Видно, что у такого треугольника сумма углов строго меньше π.

Следствие 3. *Сумма углов выпуклого n–угольника строго меньше $(n-2)\pi$.*

21. Какие значения может принимать сумма углов треугольника в сферической геометрии?

6.2 Модель Клейна $\mathbb{K}_2$

Сейчас мы построим еще одну модель геометрии Лобачевского, в которой прямые изображаются интервалами обычных евклидовых прямых. Рассмотрим модель Пуанкаре в круге и сферу, которая делится этим кругом пополам. Сделаем обратную стереографическую проекцию круга на верхнюю половинку сферы. Мы знаем, что стереографическая проекция — это ограничение пространственной инверсии, поэтому она сохраняет углы, а обобщенные окружности переводит в обобщенные окружности. Поэтому прямые модели $\mathbb{P}_2$ перейдут в окружности, по-прежнему перпендикулярные абсолюту.

Сделав теперь проекцию верхней полусферы на исходный круг (не стереографическую, а обычную — все равно что посмотреть на сферу сверху), мы получим модель Клейна. Прямые при такой проекции перейдут в хорды нового абсолюта (совпадающего со старым).

6.3 Интерпретация модели $\mathbb{H}_2$ как световой модели

Существует один общий способ построения новых геометрий. Сначала на некотором множестве (носители модели) задается метрика. Затем говорится, что прямые — это кратчайшие линии в этой метрике. Более точно, локально кратчайшие, т.е. геодезические.

Такая конструкция становится естественной, если рассматривать не произвольные метрики, а т.н. «световые». Пусть, например, носителем модели будет плоскость $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим на ней некоторую функцию $c(x, y)$ — скорость света. В качестве исходного положения о свете примем принцип Ферма: свет движется по таким траекториям, которые занимают у него наименьшее время (точнее, локально наименьшее). Расстояние между точками A и B определим как время, необходимое свету для того, чтобы добраться из A в B, а прямые — как световые траектории.

Например, если положить $c(x, y) = 1$ или $c(x, y) = \mathrm{const}$, то получим обычную Евклидову геометрию. Если в качестве $c(x, y)$ брать ступенчатые функции, т.е. функции типа $c(x, y) = 1$, если $(x, y) \in A$, и $c(x, y) = 2$, если $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash A$, то получим геометрии с линзами, показателями преломления и т.п., т.е. геометрическую оптику.

Рассмотрим теперь более сложный пример. В качестве носителя модели возьмем верхнюю полуплоскость, прямую $y = 0$ будем называть абсолютом. Положим $c(x, y) = y$. Что будет прямыми в такой геометрии? Видно, что если точки A и B находятся, например, на одинаковом расстоянии от абсолюта, то свету выгоднее идти из A в B не по евклидовому отрезку AB, а забирать немного вверх. Видно также, что световые траектории будут пересекать абсолют под прямым углом, т.к. двигаться вблизи абсолюта параллельно ему свету слишком уж невыгодно. Но какие именно кривые получатся?

Для ответа на этот вопрос нужно научиться измерять длину кривых в световой метрике. Это очень просто: нужно разбить кривую на очень маленькие (точнее, бесконечно маленькие) отрезки, измерить длину каждого, а потом все сложить. Длины же бесконечно малых отрезков мы измерять умеем, т.к. для них можно считать, что $c(x,y) = \text{const}$.

Пусть dt — это время, за которое свет проходит бесконечно малый интервал, сдвигаясь по оси x на бесконечно малую величину dt, а по оси y — на dy. Тогда

$$c(x,y) \cdot dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

т.е.

$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

Нам нужно найти такую траекторию γ, которая минимизирует общее время движения света по ней:

$$\int\limits_{\gamma} dt = \int\limits_{\gamma} \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{y} dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} L(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}) dx \to \min$$

Необходимым условием минимума в такой вариационной задаче является уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial(\partial y/\partial x)} = \frac{\partial L}{\partial y}$$

Для нашего лагранжиана оно сводится к такому:

$$1 + y'^2 + yy'' = 0$$

Дифференцируя его по x, получаем:

$$3y'y'' + yy''' = 0$$

Из последних двух уравнений следует, что

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0,$$

а это в точности условие постоянства кривизны кривой:

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Таким образом, мы получили, что световые траектории — это в точности кривые постоянной кривизны, пересекающие абсолют под прямым углом, т.е. прямые геометрии Лобачевского!

22. Вывести из принципа Ферма закон Снелла преломления света.

23. Объяснить явление миражей в пустыне, исходя из того, что холодный воздух имеет большую плотность (что физически понятно).

24. Качественно описать геометрию, где скорость света $c(x,y) = c(r),\ r^2 = x^2 + y^2$:
1) $c(r) = \frac{1}{1+r^2}$
2) $c(r) = \frac{r^2}{1+r^2}$

25. Доказать, что скорость света в модели $\mathbb{P}_2$ равна $\frac{1}{2}(1 - R^2)$.

7 Расстояния

7.1 Расстояние между точками

До сих пор мы совсем не затрагивали вопрос о расстояниях в геометрии Лобачевского. Мы говорили о равенствах отрезков, но равенство понимали как возможность перевести один отрезок в другой каким-нибудь преобразованием плоскости Лобачевского. Сейчас мы попробуем определить функцию ρ, которая двум точкам плоскости Лобачевского ставит в соответствие число, причем эта функция должна удовлетворять тем условиям, которые естественно ожидать от всякой функции расстояния. Пусть, для начала, точки $A = (x, a)$ и $B = (x, b)$ лежат на одной прямой, которая в модели $\mathbb{H}_2$ изображается вертикальным лучом. Тогда выражение для $\rho(A, B)$ должно зависеть от x, a и b. Требования к ρ:

- Инвариантность. Если отрезки AB и $A'B'$ равны, то хотим, чтобы $\rho(A, B) = \rho(A', B')$. Поскольку в группу преобразований входят горизонтальные сдвиги, то в выражение для $\rho(A, B)$ не должно входить x. Но туда входят также и гомотетии с центрами на абсолюте, поэтому $\rho(A, B) = f(\frac{b}{a})$.
- Если точка C лежит на отрезке AB, то хотим, чтобы $\rho(A, B) = \rho(A, C) + \rho(C, B)$. Если положить $\rho(A, B) = \frac{b}{a}$, то получится, что $\rho(A, B) = \rho(A, C) \cdot \rho(C, B)$. Как превратить умножение в сложение? Нужно взять логарифм: $\rho(A, B) = \ln \frac{b}{a}$.
- Хотим, чтобы $\rho(A, B) = \rho(B, A)$, но пока получается так: $\rho(A, B) = -\rho(B, A)$. Поэтому немного изменим формулу: $\rho(A, B) = |\ln \frac{b}{a}|$.
- Такая формула для расстояния удовлетворяет еще двум естественным условиям:

  1) Положительность: $\rho(A, B) \geq 0$.

  2) Точечность: $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

26. Проверить, что введенное таким образом расстояние совпадает со «световым расстоянием», определенным в предыдущей теме.

Как определить расстояние в общем случае, т.е. когда точки A и B не обязательно лежат на одном вертикальном луче? Пусть прямая AB в модели $\mathbb{H}_2$ ограничена двумя бесконечно удаленными точками X и Y так, что A лежит между X и B. Определим

$$\rho(A, B) = |\ln(ABXY)|,$$

где

$$(z_1 z_2 z_3 z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

— *двойное отношение* четырех комплексных чисел (или четырех точек плоскости). Как известно из курса комплексных чисел, если точки A, B, X, и Y лежат на одной

обобщенной окружности и если эти точки имеют такой порядок, что A лежит между X и B, то
$$(ABXY) = \frac{XA}{XB} : \frac{YA}{YB} > 0$$
Заметим, что если точки A и B лежат на одном вертикальном луче, то мы получили старую формулу для расстояния:
$$|\ln(ABX\infty)| = \left|\ln\frac{b}{a}\right|$$

Замечание. Мы могли определить расстояние и так: $\rho(A,B) = c \cdot |\ln(ABXY)|$, где $c > 0$.

Так определенная функция ρ будет инвариантна относительно группы преобразований плоскости Лобачевского, потому что всякий элемент этой группы представляется в виде композиции симметрий и отображений $z \mapsto \frac{1}{z}$ (это даже мотивация введения двойного отношения для измерения расстояний).

- **27.** Предыдущее предложение утверждает, что группа преобразований плоскости Лобачевского является подгруппой в группе ρ–изометрий. Доказать, что на самом деле эти две группы совпадают.

28. Проверить аддитивность, симметричность и точечность ρ.

- **29.** Доказать, что ρ удовлетворяет неравенству треугольника: $\rho(A,C) \leq \rho(A,B) + \rho(B,C)$.

30. Как найти расстояние между точками в моделях $\mathbb{P}_2$ и $\mathbb{K}_2$?

7.2 Различные формулы для расстояния

Теорема 6. *Пусть* $\angle AYX = \alpha$, $\angle BYX = \beta$. *Тогда*
$$\rho(A,B) = \left|\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)\right|$$

Теорема 7. *Пусть* A' *— точка, симметричная* A *относительно абсолюта,* $r = AB$, $r' = A'B$. *Тогда*
$$\rho(A,B) = \ln\frac{r'+r}{r'-r}$$

Доказательство. Нужно применить теорему синусов к треугольникам ABX и $A'BX$ и воспользоваться предыдущей формулой.

31. Доказать, что множество точек, равноудаленных от двух данных расходящихся прямых, является прямой.

- **32.** Доказать, что средняя линия треугольника расходится с основанием треугольника и меньше его половины.

7.3 Функция Лобачевского

В геометрии Лобачевского, в отличие от геометрии Евклида, меры длин и углов связаны между собой.

Рассмотрим прямую l и точку A, удаленную от l на расстояние $x > 0$. Тогда существуют два луча l_1 и l_2, проходящие через A и параллельные l. Углом параллельности $\Pi(x)$ называется половина величины угла между l_1 и l_2. Функция Π называется *функцией Лобачевского.*

Теорема 8. $\Pi(x) = 2 \operatorname{arctg} e^{-x/2}$

Доказательство. Рассмотрим эту теорему в модели Клейна. Без ограничения общности можно считать, что A совпадает с центром большого круга. Пусть перпендикуляр AH к прямой l пересекает абсолют в точках X и Y. В силу того, что величины углов, под которыми пересекаются диаметры в модели Клейна, совпадают с величинами углов в смысле геометрии Лобачевского, имеем цепочку равенств:

$$x = |\ln(AHXY)| = \ln \frac{1 + \cos \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(x)} = \ln \operatorname{ctg}^2 \frac{\Pi(x)}{2},$$

откуда и следует требуемое соотношение.

33. Доказать, что в геометрии Лобачевского с помощью циркуля и линейки нельзя поделить отрезок на 3 равные части.

7.4 Гиперболическая тригонометрия

Прямой угол в прямоугольном треугольнике, как обычно, будем обозначать буквой C.

Теорема 9. *Теорема Пифагора для прямоугольного треугольника:* $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$.

Доказательство. Можно считать, что $A = (0, k)$, $B = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $C = (0, 1)$. Тогда $\operatorname{ch} a = \frac{1}{\sin\varphi}$, $\operatorname{ch} b = \frac{1+k^2}{2k}$ и $\frac{1+k^2}{2k\sin\varphi}$.

34. Почему это утверждение называется теоремой Пифагора?

Лемма 4. $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \alpha$

Теорема 10. *Для произвольного треугольника выполняются следующие соотношения (теорема синусов, первая теорема косинусов, вторая теорема косинусов):*

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}$$

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma \operatorname{ch} a$$

35. Доказать, что в прямоугольном треугольнике выполнены следующие равенства:

$$\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta$$

$$\operatorname{sh} c = \operatorname{sh} a \sin\alpha$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cos\beta$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta$$

Какой вид они принимают для малых треугольников?

8 Кривые

8.1 Окружность

Окружностью, как и в любой другой геометрии, называется множество точек, равноудаленных от данной.

Теорема 11. *В модели $\mathbb{H}^2$ окружности изображаются евклидовыми окружностями, не пересекающими абсолют.*

36. Какими кривыми изображаются окружности в модели Пуанкаре в круге? В модели Клейна?

37. Верно ли, что вокруг всякого треугольника можно описать окружность
1) в Евклидовой геометрии
2) в сферической геометрии
3) в геометрии Лобачевского?

38. Найти координаты центра и радиус окружности в модели $\mathbb{H}_2$, задаваемой уравнением $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$.

39. Построить касательную к данной окружности, проходящую через данную точку.

40. Построить общую касательную к двум данным окружностям.

8.2 Эквидистанта

Эквидистантой называется множество точек, равноудаленных от данной прямой и лежащих относительно этой прямой в данной полуплоскости. В евклидовой геометрии эквидистанты — это прямые, параллельные данной, в геометрии Лобачевского, однако, они дают новый тип кривых.

Утверждение 3. *В модели $\mathbb{H}^2$ для луча, перпендикулярного абсолюту и пересекающие его в точке O, эквидистантами являются лучи, исходящие из O, а для полуокружности с центром на абсолюте — дугой окружности, пересекающей абсолют в тех же точках.*

8.3 Пучки прямых и орициклы

Собственным пучком называется совокупность всех прямых, проходящих через фиксированную точку, которая называется *центром пучка. Параллельным пучком* называется совокупность всех прямых, параллельных фиксированному лучу, который называется *направляющим лучом пучка. Расходящимся пучком* называется совокупность всех прямых, перпендикулярных фиксированной прямой, которая называется *базой пучка.*

Таким образом, в геометрии Лобачевского, по сравнению с евклидовой, возникает новый тип пучка: расходящийся.

Орицикл — это кривая, пересекающая все прямые параллельного пучка под прямым углом. В геометрии Евклида орициклами являются прямые. Какими кривыми изображаются орициклы в модели Пуанкаре?

Утверждение 4. *В модели $\mathbb{H}^2$ для лучей, перпендикулярных абсолюту, орициклами изображаются прямыми, параллельными абсолюту, а для полуокружностей с центром на абсолюте, параллельными в точке O — окружностями, касающимися абсолюта в точке O.*

41. Какими кривыми изображаются эквидистанты и орициклы в модели Пуанкаре в круге? В модели Клейна?

Биссектором двух прямых называется такая прямая, относительно которой эти прямые симметричны.

Теорема 12. *Любые две прямые имеют единственный биссектор и принадлежат вместе с ним одному пучку.*

Точки двух прямых называются *соответственными*, если они симметричны относительно биссектора этих прямых.

Утверждение 5. *Если две точки двух лучей пучка соответствуют третьей точки того же пучка, то они соответственны и между собой.*

Предыдущее утверждение позволяет корректно определить *траекторию пучка* как все точки, соответственные данной относительно данного пучка. В евклидовой геометрии траектория параллельного пучка — прямая, перпендикулярная всем прямым пучка, а траектория собственного — окружность с центром в центре пучка. Что в геометрии Лобачевского?

Утверждение 6. *Траектории пучков:*

1) Траектория собственного пучка — окружность с центром в центре пучка.

2) Траектория параллельного пучка — орицикл с осью, совпадающей с осью пучка.

3) Траектория расходящегося пучка — эквидистанта с базой, совпадающей с базой пучка.

- **42.** Эквидистанта с высотой d пересекает абсолют под углом φ. Доказать, что $\varphi = \Pi(d)$.

43. Точка C перемещается по дуге AB окружности, эквидистанты или орицикла. Доказать, что при этом величина $\alpha + \beta - \gamma$ не изменяется.

Список литературы

[1] П. В. Бибиков. Геометрия Лобачевского для школьников.

[2] Э. Б. Винберг. Курс алгебры.

[3] Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика?

[4] В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров. Геометрия.

[5] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии.

[6] А. Шень. О «математической строгости» и школьном курсе математики.